Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 68

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

21 de febrero de 2022

1. Calcular $\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \middle| \vec{q}_1 \vec{q}_2 \right\rangle$

Empecemos por la definición de $|\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle$ y $\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \right|$. Según la fórmula 68.3 del formulario de Crul

$$|\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle = a^\dagger(\vec{q}_1) a^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle , \qquad \left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \right| = \langle 0| a(\vec{k}_1) a(\vec{k}_2) \tag{1}$$

Por lo que podemos reescribir el producto como el valor esperado del operador $a(\vec{k}_1)a(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{q}_1)a^\dagger(\vec{q}_2)$

$$\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \middle| \vec{q}_1 \vec{q}_2 \right\rangle = \langle 0| a(\vec{k}_1) a(\vec{k}_2) a^\dagger(\vec{q}_1) a^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle \tag{2}$$

Ahora podemos usar los conmutadores que encontramos en las fórmulas del capítulo 66

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})\right] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$$

Y reescribir la ecuación (2) como

$$\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \middle| \vec{q}_1 \vec{q}_2 \right\rangle = \langle 0| a(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{q}_1) a(\vec{k}_2) a^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{q}_1) \langle 0| a(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle \tag{3}$$

Ahora tenemos tres productos de la forma $aa^\dagger$, por lo que podemos usar el conmutador de nuevo en cada uno de ellos, usando también que, según la fórmula 68.3; $a|0\rangle = 0$ y la correspondiente $\langle 0| a^\dagger = 0$.

$$\boxed{\left\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 \middle| \vec{q}_1 \vec{q}_2 \right\rangle = (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{q}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{q}_2) + (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}_2 - \vec{q}_1) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{q}_2)} \tag{4}$$

Donde también hemos usado que $\langle 0|0\rangle = 1$.